Compito di Geometria e algebra lineare di giovedì 7 gennaio 2020

Istruzioni: Avete 1 ora a disposizione. Risolvete questi esercizi su uno o più fogli. Alla fine, fate le foto dei fogli che avete scritto e mandatele a `bruno.martelli@unipi.it`

Nei fogli che mandate ci deve essere tutto il procedimento: non basta scrivere il risultato, dovete motivare la risposta.

Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari né altri strumenti elettronici, pena l'annullamento del compito. Per essere ammessi all'orale è necessario aver svolto correttamente almeno 3 esercizi.

Esercizio 1. Considera l'insieme $W \subset \mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado $\leqslant 3$ che si annullano in 0 e 1. Determina una base di W.

Esercizio 2. Considera i sottospazi $U, W \subset \mathbb{R}^3$ ed il vettore $v \in \mathbb{R}^3$ seguenti:

$$U = \{x - y + z = 0\}, \quad W = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, il vettore v si scrive in modo unico come $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Determina u.

Esercizio 3. Per quali valori reali di $t \in \mathbb{R}$ la matrice seguente è diagonalizzabile sui numeri reali?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t^2 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Determina la segnatura della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Scrivi una isometria affine $f(x) = Ax+b$ di $\mathbb{R}^3$ che sposti la retta passante per i punti $(1, 0, -2)$ e $(1, 0, 18)$ dentro al piano di equazione $z = 1$.

Soluzioni

Soluzione 1. Ad esempio $x(x-1)$ e $x^2(x-1)$.

Soluzione 2. Si scrive come $\begin{pmatrix} 17 \\ -5 \\ -22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}$. Quindi $u = \begin{pmatrix} 17 \\ -5 \\ -22 \end{pmatrix}$.

Soluzione 3. È diagonalizzabile per ogni $t \neq 0$.

Soluzione 4. $(1, 1, 1)$.

Soluzione 5. Ad esempio, $f(x) = Ax + b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$